Rappels : présentation soignée, exercices clairement séparés, résultats encadrés, tableaux à la règle et au crayon.

EXERCICE 1 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

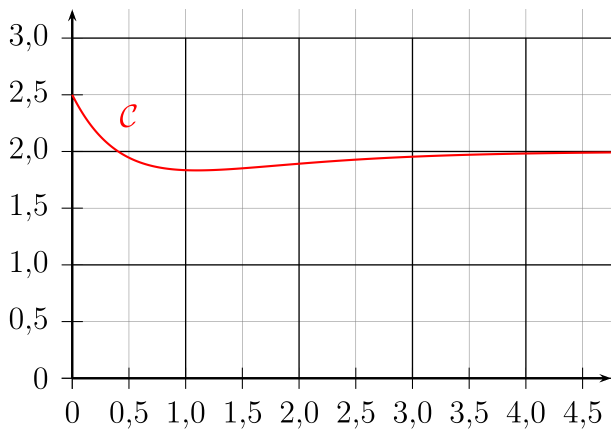
1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. a) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de f.
3. En déduire que f admet un maximum local. Préciser les valeurs exactes de sa position et de sa valeur.

EXERCICE 2 Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère. Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage.

On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t exprimé en seconde.
On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On admet que la fonction f correspondant à la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1{,}5\mathrm{e}^{-2t} + 2.$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$.
2. a) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

   b) En donner une interprétation technique.
3. a) Montrer que la dérivée peut s'écrire : $f'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left(\mathrm{e}^{t} - 3\right)$.

   b) Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $\mathrm{e}^{t} - 3 \geqslant 0$.

   c) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE 3 Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0{,}5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,10]$, on a : $f'(t) = 3(-0{,}5t + 1)\mathrm{e}^{-0{,}5t+1}$.

   b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

   c) Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?

   Quelle est alors cette quantité maximale ?
2. a) Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;\,10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b) On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.

Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
   b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

FIN